Größen, Proportionalitäten, Vektoren und lineare Funktionen

FRANZ PAUER (UNIVERSITÄT INNSBRUCK)

In diesem Beitrag wird der Zusammenhang zwischen den Begriffen Größe und Vektor, sowie zwischen (direkt) proportionalen Zuordnungen und linearen Funktionen vorgestellt. Größe und Vektor sind Begriffe, die nicht ohne Bezug auf ihre Zugehörigkeit zu einer Menge mit gewissen Rechenoperationen erklärt werden können.
Größen sind Elemente eines Größenbereichs, das ist eine Menge, deren Elemente mit positiven reellen Zahlen multipliziert werden können. Ein Größenbereich ist homogen, wenn jedes seiner Elemente ein Vielfaches jedes anderen ist. Elemente von homogenen Größenbereichen können durch eine ausgewählte Größe (Maßeinheit) und eine positive Zahl (Maßzahl) beschrieben werden.
Vektoren sind Elemente eines Vektorraums, das ist eine Menge, deren Elemente addiert und mit beliebigen reellen Zahlen multipliziert werden können.
Eine Funktion zwischen zwei Größenbereichen ist (direkt) proportional, wenn das Bild eines positiven Vielfachen das gleiche Vielfache des Bildes ist. Eine Funktion zwischen zwei Vektorräumen ist linear, wenn das Bild eines Vielfachen das gleiche Vielfache des Bildes ist und das Bild einer Summe die Summe der Bilder ist.

1. Einleitung

Die Begriffe Größe und proportionale Zuordnung werden im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1 (teilweise schon in der Volksschule), die Begriffe Vektor und lineare Funktion in der Sekundarstufe 2 eingeführt. In diesem Beitrag wird ein Zusammenhang zwischen den Begriffen *Größe* und *Vektor* sowie zwischen den Begriffen *proportionale Zuordnung* und *lineare Funktion* aufgezeigt. Das sollte einerseits zu einem besseren Verständnis der Begriffe Größe und proportionale Zuordnung führen, andererseits dazu anregen, bei der Einführung dieser Begriffe bereits die Grundlage für die spätere Einführung der Begriffe Vektor und lineare Funktion zu legen.

Der Begriff Größe kommt schon in den Elementen des Euklid vor. Im 19. und 20. Jahrhundert wurde der Begriff im Zusammenhang mit der exakten Einführung von reellen Zahlen präzisiert. Seit der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde dieser Begriff auch Thema der Mathematikdidaktik. Ein Überblick über die Geschichte des Begriffes und eine Literaturliste dazu findet sich in (Griesel 2016), siehe auch (Griesel 1997). Es hat sich herausgestellt, dass der Begriff Größe den Begriff *Größenbereich* erfordert: eine Größe ist ein Element eines Größenbereichs, das ist eine Menge mit einer gewissen Struktur. Diese Eigenschaft verbindet Größen und Vektoren. Auch ein Vektor ist Element einer Menge mit Struktur, nämlich eines *Vektorraums*. Proportionale Zuordnungen bzw. lineare Funktionen sind strukturerhaltende Funktionen zwischen Größenbereichen bzw. Vektorräumen.

Abschnitt 2 geht auf das Vorkommen des Begriffs Größe in den Lehrplänen der Volksschule und der AHS (Unterstufe) bzw. Mittelschule ein. In der Volksschule werden die Größenbereiche Länge, Masse, Raum, Zeit, Geld, Flächeninhalt und Volumen unterrichtet. Jeder dieser Begriffe erfordert eine sorgfältige Einführung, exemplarisch werden für den Begriff Länge Grundlagen dazu angegeben.

Der nächste Abschnitt befasst sich mit Vektoren. Im Lehrplan der AHS (Oberstufe) wird nur ein (allerdings sehr allgemeiner) Spezialfall davon betrachtet: Vektoren sind Elemente des $\mathbb{R}^n$, also n-Tupel von reellen Zahlen. Das Vorkommen anderer Vektoren wie Ortsvektoren oder Verschiebungen etwa im Physikunterricht sowie die im Schulunterricht meist nicht explizt erwähnte Tatsache, dass auch reellwertigen Funktionen Vektoren sind, führen auf die folgende Grundvorstellung zu Vektoren: „Vektoren können miteinander addiert und mit reellen Zahlen multipliziert werden".

Im vierten Abschnitt wird diese Grundvorstellung zu einer Grundvorstellung zu Größen erweitert:

„Größen können mit positiven reellen Zahlen multipliziert werden". Für eine genaue Definiton wird der

Ich danke Manfred Borovcnik für das sorgfältige Lesen des Manuskripts und für viele Beiträge zur Verbesserung dieses Textes.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 56, 2024, S. 125 - 139.

in der Mathematik (besonders in der Geometrie, der Invariantentheorie, der harmonischen Analysis und der Kombinatorik) sehr bedeutsame Begriff der Operation einer Gruppe auf einer Menge verwendet. Ein Größenbereich wird als Menge mit einer Operation der Gruppe der positiven reellen Zahlen (mit der Multiplikation als Verknüpfung) definiert. Eine Größe ist ein Element eines Größenbereichs.

Der fünfte Abschnitt beschreibt strukturerhaltende Funktionen zwischen Größenbereichen, das sind direkt proportionale Funktionen, und zwischen Vektorräumen, das sind lineare Funktionen. Auch zu deren Verständnis ist die Analogie zwischen Größen und Vektoren hilfreich. Weiters wird kurz auf Schlussrechnungen und indirekt proportionale Funktionen eingegangen.

Im sechsten Abschnitt werden die genauen Definitionen der Begriffe Gruppe, Vektorraum und Operation einer Gruppe auf einer Menge angegeben.

2. Größen in den österreichischen Lehrplänen

2.1. Größen im Lehrplan der Volksschule

Der „Kompetenzbereich Größen“ ist einer von vier Kompetenzbereichen der Mathematik im Lehrplan der Volksschule (BMBWF 2024a). Dort steht unter anderem:

- *Der Bereich Größen umfasst das Vergleichen von Größen, das Messen von Größen insbesondere mithilfe normierter Maßeinheiten, das Anschreiben, Interpretieren und Umrechnen von Maßangaben, das Abschätzen von Größen mithilfe geeigneter Stützpunktvorstellungen sowie das Rechnen mit Größen.*

- *Die Begriffsbildungen erfolgen durch handelnden Umgang mit konkreten Objekten. Das Prinzip des Messens und das Vergleichen von Größen sind dabei wesentlich.*

Insbesondere sollen diverse Maßeinheiten für Länge, Masse, Zeit, Geld, Flächeninhalt und Volumen eingeführt werden.

Bemerkung: Vielleicht ist es in der Volkschule zu schwierig, gute Grundvorstellungen zu allgemeinen Begriffen wie Größe und Maßeinheit zu vermitteln.. Man könnte auf den allgemeinen Begriff Größe verzichten und stattdessen nur auf die Spezialfälle Länge, Masse, Zeit, Geld, Flächeninhalt und Volumen eingehen. Auch das ist nicht einfach, wir zeigen das in den nächsten zwei Unterabschnitten am Beispiel des Begriffes „Länge“. Natürlich richten sich die folgenden zwei Abschnitte so wie der ganze Beitrag nicht an Schülerinnen und Schüler, sondern an Lehrpersonen!

2.2. Länge einer Strecke

Länge ist eine Eigenschaft von Strecken in der Ebene, von der man das Folgende verlangt:

- Die Länge von zwei Strecken ist genau dann gleich, wenn diese durch Parallelverschieben und Drehen zur Deckung gebracht werden können.

- Man kann Längen mit positiven Zahlen multiplizieren.

Um den Begriff Länge geometrisch zu definieren, nehmen wir an, dass wir einen Bleistift, ein Dreieck, ein Lineal und einen Zirkel zur Verfügung haben und damit Strecken parallel verschieben und um jeden ihrer Eckpunkte drehen können.

Wir wählen in der Ebene einen Punkt 0 und eine Halbgerade h mit Anfangspunkt 0.

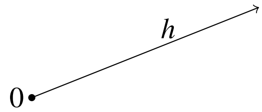

Abb. 1: Eine Halbgerade h in der Ebene mit Anfangspunkt 0.

Wir verschieben eine Strecke AB mit Endpunkten A und B so, dass A nach 0 verschoben wird. Dann drehen wir sie um den Punkt 0 so, dass B auf die Halbgerade h gedreht wird. Die Länge der Strecke mit Endpunkten A und B muss gleich der Länge der Strecke mit Endpunkten 0 und B' sein.

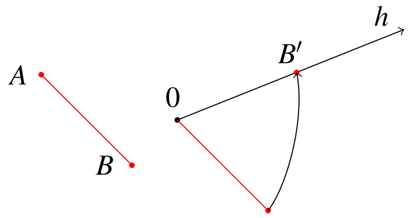

Abb. 2: Die Strecke AB wird durch Verschieben und Drehen mit einer Strecke $0B'$ auf h zur Deckung gebracht.

Zwei verschiedene Strecken auf h mit 0 als einem Endpunkt können nicht zur Deckung gebracht werden. Es gibt also zu jedem Punkt $P \neq 0$ auf h genau eine Länge, und zwar die der Strecke $0P$.

Wie beschreibt man in der Mathematik eine „Eigenschaft"? Eine Eigenschaft ist die Menge aller Elemente, die diese Eigenschaft haben. Zum Beispiel ist die Zahl 4 die Menge aller Mengen, die vier Elemente (das heißt: gleich viele wie zum Beispiel die Menge $\{a,b,c,d\}$) haben.

In diesem Sinn definieren wir die Länge $\overline{AB}$ der Strecke AB als Menge aller Strecken, die mit AB durch Parallelverschieben und Drehen zur Deckung gebracht werden können. Strecken mit der Länge $\overline{AB}$ heißen *Repräsentanten* dieser Länge. Jede Länge hat genau einen Repräsentanten $0P$ mit $P \in h$.

Bemerkung: Wir haben uns hier auf den Begriff „Länge einer Strecke" beschränkt, man kann ihn dann leicht auf Längen von Streckenzügen und auf Längen von gewissen Kurven („rektifizierbare Kurven") erweitern (siehe z.B. Forster 1984, S. 28).

2.3. Vielfache von Längen

Wir legen nun durch ein zeichnerisches Verfahren fest, was ein (positives) Vielfaches einer Länge ist. Dazu wählen wir wieder einen Punkt 0 in der Ebene und eine Halbgerade h mit Anfangspunkt 0 (siehe Abb. 1) und zeichnen dann eine von h verschiedene positive Zahlenhalbgerade mit Anfangspunkt 0 in die Ebene.

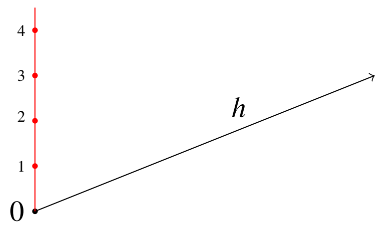

Abb. 3: Eine Halbgerade und eine Zahlenhalbgerade mit gemeinsamem Anfangspunkt 0.

Sind c eine positive Zahl und P ein Punkt $\neq 0$ auf h, dann verschieben wir ein Geradenstück durch 1 und P in den Punkt, der auf der Zahlenhalbgeraden der Zahl c entspricht. Den Schnittpunkt des verschobenen Geradenstücks mit der Halbgeraden h nennen wir $c \cdot P$ (Abb. 4). Die Länge der Strecke $0(c \cdot P)$ heißt das *c-fache der Länge* der Strecke $0P$.

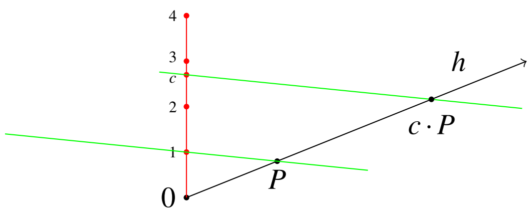

Abb. 4: Zeichnerische Definition des c-fachen einer Länge.

Ist $\overline{0P}$ die Länge der Strecke zwischen 0 und P, schreiben wir $c \cdot \overline{0P}$ für das c-fache von $\overline{0P}$. „Die Länge $\overline{0P}$ mit c multiplizieren" bedeutet $c \cdot \overline{0P}$ zu ermitteln.

Sind P und Q Punkte $\neq 0$ auf h, dann verschieben wir ein Geradenstück durch 1 und P parallel in den Punkt Q. Die Zahl d, die dem Schnittpunkt des verschobenen Geradenstücks mit der Zahlenhalbgeraden entspricht, ist dann die Zahl, mit der man die Länge $\overline{0P}$ multiplizieren muss, um die Länge $\overline{0Q}$ zu erhalten.

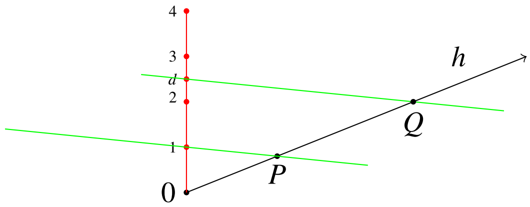

Abb. 5: Zeichnerische Ermittlung der Zahl d mit $d \cdot \overline{0P} = \overline{0Q}$.

Dann ist $\overline{0Q} = d \cdot \overline{0P}$, insbesondere ist jede Länge ein positives Vielfaches einer ausgewählten Länge, einer „Längeneinheit"(hier $\overline{0P}$).

2.4. Größen im Lehrplan der AHS

In den Lehrplänen der AHS (BMBWF2024b) und der Mittelschule findet man zum Thema Größen im Abschnitt für die erste Klasse im Unterrichtsfach Mathematik

- *Größen ein- und mehrnamig anschreiben, Maßangaben interpretieren und Umrechnungen durchführen*
- *Vergleichen und Messen von Größen (insbesondere Längen, Flächen- und Rauminhalte, Massen, Zeitspannen, Geldbeträge)*
- *Beachten des Unterschieds zwischen einem geometrischen Objekt und seiner Größe (Strecke - Streckenlänge, Fläche - Flächeninhalt, Winkel - Winkelmaß)*

und im Abschnitt für die dritte Klasse im Unterrichtsfach Physik

- *die wesentlichen physikalischen Größen von Bewegungen (Ort, Tempo und Geschwindigkeit) in verschiedenen Kontexten anwenden*
- *Experimente zum Zusammenhang der Grundgrößen der Elektrizität (Spannung, Stromstärke und Widerstand) ... durchführen.*

Was haben die Begriffe Länge, Flächeninhalt, Masse, Geldbetrag, Spannung, ... gemeinsam? Sie sind „Größen", aber was bedeutet das?

Bemerkung: Für die Unterrichtsplanung sind Rückblick (Was ist den Lernenden zu diesem Thema bereits bekannt, worauf kann man aufbauen?) *und* Vorschau (Welche Inhalte und Begriffe werden später auf dieses Thema Bezug nehmen, wie kann man die Lernenden darauf gut vorbereiten?) nötig. Mathematische Begriffe und Inhalte müssen grundsätzlich so eingeführt werden, dass später darauf gut aufgebaut werden kann. Grundvorstellungen müssen so vermittelt werden, dass sie spätere Grundvorstellungen nicht behindern. Das ist einer der Gründe, warum es wichtig ist, alle Lehrpersonen für den Unterricht in der gesamten Sekundarstufe (und nicht nur für den in der Sekundarstufe 1) auszubilden.

Der Begriff Vektor baut in späteren Schuljahren auf den Begriff Größe auf. Daher gehen wir nun zuerst auf die Frage „*Was ist ein Vektor?*" ein und erst dann auf die Frage „*Was ist eine Größe?*". Diese „Vorschau" soll auch das Verständnis des Begriffs Größe erleichtern.

3. Vektoren

Dieser Abschnitt verwendet Teile von (Pauer 2005) und (Pauer 2019).

3.1. Vektoren im Lehrplan der AHS sind n-Tupel von reellen Zahlen

Im Lehrplan der AHS (BMBWF 2024b) findet man das Thema Vektoren in den Abschnitten für die 5. Klasse

- *Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^2$: Vektoren addieren, subtrahieren, mit reellen Zahlen multiplizieren und diese Rechenoperationen geometrisch veranschaulichen können*

und für die 6. Klasse

- *Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und deren Rechenoperationen kennen, in Anwendungskontexten interpretieren und verständig einsetzen können.*

$\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n-Tupel von reellen Zahlen. 2-Tupel heißen Paare, 3-Tupel heißen Tripel.
Ein *Vektor* ist nach dem Lehrplan für die AHS also ein n-Tupel von reellen Zahlen, zum Beispiel ein Paar oder ein Tripel von reellen Zahlen.

Man kann n-Tupel als Zeilen oder Spalten anschreiben. Zum Beispiel wird durch

$$(-3, \frac{1}{2}) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ein Vektor in $\mathbb{R}^2$ angeschrieben und durch

$$(3.9, -2, -0.13, 7.25) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 3.9 \\ -2 \\ -0.13 \\ 7.25 \end{pmatrix}$$

ein Vektor in $\mathbb{R}^4$.

Mit Vektoren in $\mathbb{R}^n$ kann man rechnen. Sie können miteinander addiert und mit Zahlen multipliziert werden. Die entsprechenden Rechenoperationen *Addition* $(+)$ und *Multiplikation mit Zahlen* $(\cdot)$ sind „komponentenweise definiert".
Um Platz zu sparen, werden sie hier nur für $\mathbb{R}^2$ angegeben, für $\mathbb{R}^n$ sind sie analog definiert.

- Für $a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$ sei

  $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$ und

  $t \cdot (a, b) := (t \cdot a, t \cdot b)$.

- Die daraus abgeleitete Subtraktion sei

  $(a, b) - (c, d) := (a, b) + (-1) \cdot (c, d) = (a - c, b - d)$.

3.2. Ortsvektoren

Es gibt auch andere Vektoren, zum Beispiel „Ortsvektoren". Man wählt dazu einen „Nullpunkt" 0 in der Ebene. Ein „Ortsvektor" ist dann ein Punktepaar $(0, P)$, dieses wird durch einen Pfeil mit Schaft 0 und Spitze P dargestellt (Abb. 6).

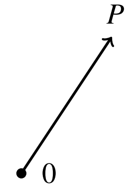

Abb. 6: Wahl eines Nullpunktes 0 und Darstellung des Punktepaares $(0, P)$ durch einen Pfeil.

Ortsvektoren können addiert und mit Zahlen multipliziert werden, diese Rechenoperationen werden geometrisch definiert. Dazu sind nur ein Bleistift, ein Lineal und ein Dreieck nötig, damit können Geraden parallel verschoben werden.
Für die Definition der Addition unterscheidet man zwei Fälle:

- Falls die Punkte 0, P und Q nicht auf einer Geraden liegen, verschiebt man ein Geradenstück durch 0 und P parallel in den Punkt Q und ein Geradenstück durch 0 und Q parallel in den Punkt P. Den Schnittpunkt dieser zwei verschobenen Geradenstücke nennen wir $P+Q$ (Abb. 7).

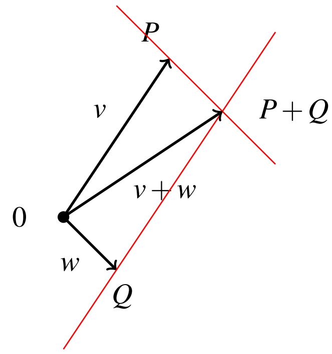

Abb. 7: Konstruktion der Summe von Ortsvektoren.

- Falls die Punkte 0, P und Q kollinear sind, also alle drei auf einer Geraden liegen, wählt man einen Punkt H, der nicht auf dieser Geraden liegt. Dann ermittelt man den Punkt $(H+P)+Q$, indem man wie im ersten Fall zuerst $H+P$ und dann $(H+P)+Q$ konstruiert. Schließlich verschiebt man ein Geradenstück durch 0 und H parallel in den Punkt $(H+P)+Q$, der Schnittpunkt dieses Geradenstücks mit der Geraden durch 0, P und Q wird mit $P+Q$ bezeichnet. Das liegt nahe, weil dann $(H+P)+Q = H+(P+Q)$ ist. Der so konstruierte Punkt $P+Q$ hängt nicht von der Wahl von H ab.

- In beiden Fällen wird die *Summe* der Ortsvektoren $v=(0,P)$ und $w=(0,Q)$ dann als $v+w := (0,P+Q)$ definiert.

Um einen Ortsvektor $v := (0,P)$ mit einer reellen Zahl c zu multiplizieren, zeichnet man in die Ebene eine Zahlengerade so, dass die Zahl 0 im Nullpunkt 0 liegt und dieser der einzige Schnittpunkt der Zahlengeraden mit der Geraden durch 0 und P ist. Dann verschiebt man ein Geradenstück durch den Punkt P und den Punkt, auf dem die Zahl 1 liegt, in den Punkt, auf dem die Zahl c liegt. Den Schnittpunkt dieses verschobenen Geradenstücks mit der Geraden durch 0 und P bezeichnen wir mit $c \cdot P$. Das *c-fache* des Ortsvektors $v=(0,P)$ definieren wir als $c \cdot v := (0, c \cdot P)$ (Abb. 8).

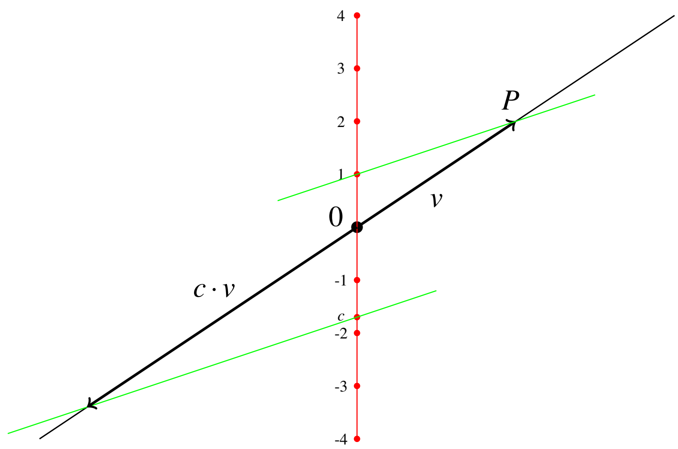

Abb. 8: Konstruktion des c-fachen des Ortsvektors v.

3.3. Verschiebungen bzw. Translationen

Eine *Verschiebung* oder *Translation* oder ein *Verschiebungsvektor* in einer Ebene E ist eine Funktion von E nach E. Ist $T : E \longrightarrow E$ eine Verschiebung, dann ist der Graph von T die Menge $\{(P, T(P)) \,|\, P \in E\}$. Wir stellen ein Punktepaar (A, B) als Pfeil mit Schaft A und Spitze B dar. Der Graph der Translation T mit $T(A) = B$ wird dann durch die Menge aller Pfeile dargestellt, die man durch (Parallel-)Verschieben des Pfeils (A, B) erhält (Abb. 8).

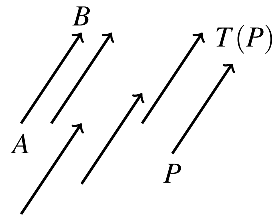

Abb. 9: Graph der Translation, die A nach B verschiebt.

Die *Summe von Verschiebungen* S, T ist als ihre Hintereinanderausführung definiert: $S + T := S \circ T$. Dabei ist zu beachten, dass Verschiebungen vertauschbar sind, das heißt: für je zwei Verschiebungen S, T ist $S \circ T = T \circ S$, also auch $S + T = T + S$. Wäre das nicht so, könnte man die Hintereinanderausführung von Verschiebungen nicht als Addition betrachten.

Ist c eine reelle Zahl und T eine Verschiebung, dann ist $c \cdot T$, das *c-fache von* T, jene Verschiebung, die jedem Punkt P die Spitze des Ortsvektors $c \cdot (P, T(P))$ zuordnet. Dabei wird $(P, T(P))$ als Ortsvektor bezüglich des Nullpunktes P betrachtet.

Manchmal wird eine Verschiebung mit ihrem Graphen gleichgesetzt und dann als „Menge von Pfeilen, die zueinander parallel, gleich lang und gleich gerichtet sind“ bezeichnet. Dabei ist nicht ein einzelner Pfeil, sondern die ganze Menge solcher Pfeile ein Vektor.

3.4. Was ist ein Vektor?

Es gibt viele verschiedene Dinge, die als „Vektor“ bezeichnet werden, wir haben gerade drei solche besprochen: n-Tupel, Ortsvektoren und Verschiebungen. Was haben diese gemeinsam? Alle drei sind Elemente einer Menge, auf der zwei Rechenoperationen definiert sind: Multiplikation mit reellen Zahlen und Addition. Die erstere ordnet einer reellen Zahl und einem Vektor wieder einen Vektor zu, die letztere zwei Vektoren einen Vektor.

Formal nicht ganz korrekt aber inhaltlich richtig ist dazu die folgende Grundvorstellung im Schulunterricht: „Vektoren kann man addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren“ und „wer behauptet, ein bestimmter Gegenstand sei ein Vektor, muss angeben, wie man ihn mit reellen Zahlen multipliziert und zu gleichartigen Gegenständen addiert“.

Bemerkung: Statt „Multiplikation mit reellen Zahlen“ sagt man oft „Skalarmultiplikation“. Diese darf aber nicht mit dem „Skalarprodukt“ verwechselt werden, das zwei Vektoren eine Zahl (einen „Skalar“) zuordnet.

Bemerkung: Die Aussage „ein Vektor ist ein Pfeil“ ist nicht richtig.
Denn: Einerseits gibt es viele Vektoren, wie zum Beispiel n-Tupel oder reellwertige Funktionen (siehe 3.5), die keine Pfeile sind und andererseits sind nicht alle Pfeile Vektoren, zum Beispiel:

- Pfeile in Graphen von Translationen („Pfeilklassen“) sind keine Vektoren, sondern der gesamte Graph ist ein Vektor.

- Pfeile, die eine Drehung im Raum beschreiben, sind keine Vektoren. Diese Pfeile geben Drehachse, Drehwinkel und Drehrichtung einer Drehung an. Es gibt keine natürliche Weise, Drehungen um Achsen durch den Nullpunkt zu addieren. Diese können zwar hintereinanderausgeführt werden, im Unterschied zu Translationen ist die Hintereinanderausführung von Drehungen im Raum nicht kommutativ und eignet sich daher nicht als Addition.

Bemerkung: In der Physik werden Vektoren manchmal als Objekte, die „Betrag und Richtung“ haben, bezeichnet. Die Richtung eines Vektors ist die Menge aller seiner positiven Vielfachen, also eine Halbgerade von 0 durch diesen Vektor. In diesem Sinn hat jeder Vektor eine Richtung. Einen Betrag haben Vektoren aber nur dann, wenn auf dem Vektorraum ein Abstandsbegriff gegeben ist, zum Beispiel durch ein Skalarprodukt oder zumindest eine Norm.

Um zu definieren, was ein Vektor ist, brauchen wir den Begriff „Vektorraum“.
Ein *Vektorraum* ist eine Menge zusammen mit einer *Addition* und einer *Multiplikation mit Zahlen*. *Vektoren sind Elemente eines Vektorraums.* Die Addition ordnet je zwei Vektoren einen Vektor, ihre *Summe*, zu. Die Multiplikation mit Zahlen ordnet jeder reellen Zahl c und jedem Vektor v einen Vektor $c \cdot v$, das *c-fache* von v, zu.
Diese zwei Rechenoperationen erfüllen gewisse Rechenregeln (siehe Abschnitt 6).

Bemerkung: Vielleicht wundert sich jemand, dass die Erklärung des Begriffes Vektor den Begriff Vektorraum braucht. Das ist aber auch bei manchen Begriffen der Alltagssprache so. Wie erklärt man, was ein Wiener ist? Die einfachste Erklärung ist: ein Wiener ist ein Einwohner von Wien. Dazu muss man aber zuerst zu erklären, was Wien ist. Erklärungen, ohne den Begriff Wien zu verwenden (zum Beispiel: ein Wiener ist ein Mann, der gerne Walzer tanzt, gerne Schnitzel isst und viel über den Tod nachdenkt) stellen sich rasch als unzulänglich heraus.

Eine andere Möglichkeit, den Begriff Vektor im Schulunterricht zu vereinbaren, ist die Beschränkung auf einen Spezialfall. Dieser sollte einerseits einfach und andererseits möglichst allgemein sein. Die Festlegung des Lehrplans der AHS, dass Vektoren n-Tupel sind, ist in dieser Hinsicht sehr gut. Einerseits können n-Tupel und die Rechenoperationen dafür einfach eingeführt werden, andererseits ist dieser Spezialfall „sehr allgemein“. Denn jeder (endlich-dimensionale) Vektorraum kann nach Wahl einer „Basis“ als $\mathbb{R}^n$ mit den komponentenweisen Rechoperationen aufgefasst werden, genauer: jeder (endlich-dimensionale) Vektorraum ist isomorph zum $\mathbb{R}^n$ (siehe z. B. Jänich 1993). Jeder Vektor wird dann durch das n-Tupel seiner Koordinaten bezüglich der gewählten Basis eindeutig beschrieben. Will man mit Vektoren am Computer rechnen, muss man sie zumeist als n-Tupel eingeben.

3.5. Reellwertige Funktionen sind Vektoren

Es gibt aber auch Vektoren, die nicht durch ein n-Tupel beschrieben werden können: Für Funktionen f, g von einer Menge M (zum Beispiel ein Intervall reeller Zahlen) nach $\mathbb{R}$ und eine reelle Zahl c definieren wir

- die Summe $f+g$ als Funktion von M nach $\mathbb{R}$ mit $(f+g)(t) := f(t)+g(t)$ („punktweise addieren“) und

- das c-fache von f als Funktion $c \cdot f$ von M nach $\mathbb{R}$ mit $(c \cdot f)(t) := c \cdot f(t)$ („punktweise mit Zahlen multiplizieren“).

Mit diesen Rechenoperationen erfüllt die Menge aller Funktionen von M nach $\mathbb{R}$ alle Rechenregeln eines Vektorraums. Wenn M eine unendliche Menge ist (zum Beispiel ein Intervall reeller Zahlen), dann ist der Vektorraum aller Funktionen von M nach $\mathbb{R}$ nicht endlich-dimensional, das heißt, diese Vektoren können nicht durch ein n-Tupel von reellen Zahlen beschrieben werden. Man veranschaulicht diese Vektoren durch ihre Graphen. In Abb. 9 sind die Graphen zweier Funktionen und einer Summe von Vielfachen davon eingezeichnet.

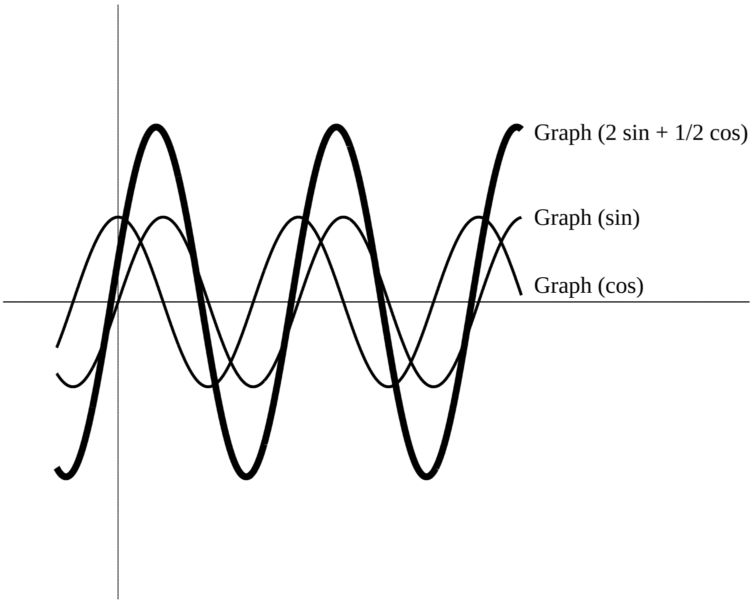

Abb. 10: Graph der Summe der 2-fachen Sinusfunktion und der $\frac{1}{2}$-fachen Cosinusfunktion.

4. Was sind Größen?

4.1. Grundvorstellung zu Größen

Im Lehrplan der AHS-Unterstufe findet man *„Vergleichen und Messen von Größen (insbesondere Längen, Flächen- und Rauminhalte, Massen, Zeitspannen, Geldbeträge)"*.

Was haben diese Begriffe gemeinsam? Längen, Massen, Flächeninhalte, Rauminhalte, Zeitspannen und Geldbeträge können verdoppelt, verdreifacht, halbiert, gedrittelt, ... werden, also mit positiven reellen Zahlen multipliziert werden.

Das legt in Analogie zum Begriff Vektor die folgende Grundvorstellung von Größen nahe: „Größen können mit positiven Zahlen multipliziert werden" , oder - etwas genauer formuliert - eine Größe ist ein Element eines *Größenbereichs*, das ist eine Menge, deren Elemente mit positiven reellen Zahlen multipliziert werden können.

4.2. Definition von Größen und Größenbereichen

Mit $\mathbb{R}_{>0}$ bezeichnen wir die Menge der positiven reellen Zahlen. Das Produkt von zwei positiven reellen Zahlen (hier durch einen Punkt auf der Zeile dargestellt) ist wieder eine positive reelle Zahl und für die Multiplikation auf $\mathbb{R}_{>0}$ gelten die Rechenregeln einer Gruppe (siehe Abschnitt 6). Wir sprechen daher von „der Gruppe der positiven reellen Zahlen".

Eine Funktion

$$\mathbb{R}_{>0} \times G \longrightarrow G, \quad (c,g) \longmapsto c \cdot g$$

ist eine *Operation der Gruppe* $\mathbb{R}_{>0}$ *auf einer Menge G*, wenn gilt:

für alle $g \in G$ und alle positiven Zahlen c, d ist $c \cdot (d \cdot g) = (c.d) \cdot g$ und $1 \cdot g = g$

(siehe Abschnitt 6).

Ein *Größenbereich* ist eine Menge zusammen mit einer Operation der Gruppe der positiven reellen Zahlen auf dieser Menge. Eine *Größe* ist ein Element eines Größenbereichs.

Wenn g eine Größe ist und c positive reelle Zahl, dann nennen wir $c \cdot g$ *das c-fache* der Größe g.

4.3. Beispiele für Größenbereiche

- Jeder Vektorraum ist ein Größenbereich, jeder Vektor ist eine Größe.
- Der *Größenbereich Länge* ist die Menge aller Längen zusammen mit der in Abschnitt 2.3 definierten Operation der Gruppe $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen.
- Der *Größenbereich Geldbetrag* ist die Menge aller Geldbeträge zusammen mit der üblichen Operation der Gruppe der positiven reellen Zahlen.

Nicht jeder Größenbereich ist ein Vektorraum und nicht jede Größe ist ein Vektor. Zum Beispiel sind Längen keine Vektoren, weil man sie nicht mit negativen Zahlen multiplizieren kann.

Teilmengen von Vektorräumen, die Größenbereiche sind, heißen *Kegel*. Zum Beispiel ist die Menge aller Linearkombinationen zweier Vektoren mit positiven Koeffizienten ein Kegel.

4.4. Homogene Größenbereiche

Wir nennen Größenbereiche *homogen*, wenn es zu je zwei Größen g,h eine positive Zahl c mit

$$h = c \cdot g$$

gibt. Das heißt, dass jede Größe in einem homogenen Größenbereich ein Vielfaches jeder anderen ist.

Diese Zahl c heißt *Verhältnis von h zu g*.

Zum Beispiel ist $\frac{4}{3}$ das Verhältnis von $4cm$ zu $3cm$ (und auch von $6cm$ zu $4,5cm$), man sagt dazu auch „das Verhältnis 4 zu 3“.

Die Größenbereiche Länge, Flächeninhalt, Rauminhalt, Masse, Geldbeträge, positive reelle Zahlen, Widerstand, ... sind homogen. Man beachte, dass wir dann „Null“ nicht als Größe auffassen können.

Vektorräume, Kraft im Raum und Geschwindigkeit im Raum sind Beispiele für nicht homogene Größenbereiche.

4.5. Maßeinheit und Maßzahl

Wählt man in einem homogenen Größenbereich irgendeine Größe aus, dann sind alle anderen Größen Vielfache davon. Die ausgewählte Größe nennt man dann *Einheit* und das Verhältnis einer Größe zu der Einheit die *Maßzahl* dieser Größe (bezüglich der gewählten Einheit).

Die homogenen Größenbereiche, die wir hier betrachten, haben alle eine zusätzliche Eigenschaft:

Ist das c-fache einer Größe g gleich g (also $c \cdot g = g$), dann muss $c = 1$ sein.

In homogenen Größenbereichen mit dieser Eigenschaft ist die Maßzahl einer Größe bezüglich einer Einheit eindeutig bestimmt.
Denn: hätte eine Größe bezüglich der Einheit g zwei Maßzahlen c und d, dann wäre $c \cdot g = d \cdot g$ und

$$g = (c^{-1}.c) \cdot g = c^{-1} \cdot (c \cdot g) = c^{-1} \cdot (d \cdot g) = (c^{-1}.d) \cdot g,$$

also muss $c^{-1}.d = 1$ und damit $d = c$ sein.
Somit ist in diesem Fall jede Größe durch eine Maßeinheit und eine Maßzahl eindeutig bestimmt.

In solchen homogenen Größenbereichen kann auch addiert werden:

$$c \cdot g + d \cdot g := (c + d) \cdot g.$$

Längen, Geldbeträge, Zeitspannen, Massen, ... kann man also nicht nur mit positiven Zahlen multiplizieren, sondern auch addieren. Die Addition kann im Fall homogener Größenbereiche mit der Zusatzbedingung oben aus der Multiplikation mit positiven Zahlen hergeleitet werden. Man kann sie aber auch direkt motivieren und einführen, zum Beispiel die Addition von Längen über das Aneinanderlegen von Strecken oder die Addition von Massen durch das Zusammenleeren der Inhalte zweier Behälter in einen einzigen.

Bemerkung: Die hier vorgestellte Definition von Größe weicht von der in (Griesel 2016) ab. Ein homogener Größenbereich mit der oben genannten Zusatzeigenschaft entspricht aber im Wesentlichen dem, was H. Griesel in (Griesel 1997) und (Griesel 2016) Wertemenge einer Größe nennt. Auf dieser Wertemenge W ist eine Funktion $W \times W \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, (x,y) \longmapsto x/y$, vorgegeben, die zwei Bedingungen erfüllt. In einem homogenen Größenbereich ist diese Zahl x/y die positive Zahl c mit $c \cdot y = x$.

5. Proportionale Funktionen und lineare Funktionen

5.1. Was sind „direkt proportionale Größen"?

Was meint man, wenn man in abkürzender Sprechweise sagt: „die Größen Masse einer Ware und ihr Preis sind direkt proportional"? Kann die Größe $3kg$ (eine Masse) direkt proportional zur Größe $7,5$ Euro (ein Geldbetrag) sein? Können die Größenbereiche der Massen und der Geldbeträge direkt proportional sein?

Sehen wir uns dazu ein Beispiel an: Ein Gemüsehändler legt die Preise seiner Waren fest. Jeder Masse (z.B. von Erdäpfeln) ordnet er einen Geldbetrag (den Preis) zu. Wenn er die Preise so festgelegt hat, dass man für die doppelte, halbe, tausendfache, c-fache ($c \in \mathbb{R}_{>0}$) Masse doppelt, halb, tausendmal, c-mal so viel bezahlen muss, dann ist seine Preisgestaltung direkt proportional. Wenn der Händler aber wie üblich einen Mengenrabatt gewährt, man also für tausend Kilogramm Erdäpfel weniger als tausend Mal soviel wie für ein Kilogramm zahlt, dann ist die Zuordnung eines Preises zu jeder Masse nicht direkt proportional.

Somit sind nicht zwei Größen und auch nicht zwei Größenbereiche *direkt proportional*, sondern eine bestimmte Zuordnung der Größen in einem ersten Größenbereich zu Größen in einem zweiten.

Ein zweites Beispiel: Fährt jemand mit dem Fahrrad, so kann man jeder Zeitspanne die Länge des Weges, die er in dieser Zeitspanne zurückgelegt hat, zuordnen. Man erhält so eine Funktion vom Größenbereich Zeit in den Größenbereich Länge. Nur wenn der Radfahrer mit gleichförmiger Geschwindigkeit unterwegs ist, dann ist diese Zuordnung bzw. Funktion direkt proportional. Direkte Proportionalität ist also eine Eigenschaft einer Funktion zwischen zwei Größenbereichen. Wir geben nun eine Definition dafür an:

Sind G und H Größenbereiche und $f : G \longrightarrow H$ eine Funktion (Zuordnung) von G nach H, dann ist f *direkt proportional*, wenn für alle Elemente $g \in G$ und alle positiven reellen Zahlen c gilt:

$$f(c \cdot g) = c \cdot f(g)$$

In Worten: „Das Bild des c-fachen einer Größe ist das c-fache ihres Bildes".

Beispiel: Wir bezeichnen mit G den Größenbereich der Zeitspannen, mit H den Größenbereich der Längen und betrachten die Funktion von G nach H mit $f(t) :=$ Länge des Weges, den ein Radfahrer in der Zeitspanne t zurücklegt.
Wenn die Funktion $f : G \longrightarrow H$ direkt proportional ist, dann fährt der Radfahrer mit *gleichförmiger Geschwindigkeit*. Dann ist $f(t) = f(t \cdot 1) = t \cdot f(1)$.
Wir wählen Einheiten in G (zum Beispiel eine Sekunde) und in H (zum Beispiel ein Meter), dann können wir G und H als $\mathbb{R}_{>0}$ auffassen.
Der Graph

$$\{(t, f(t)) \,|\, t \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

ist dann die Halbgerade

$$\{t \cdot (1, f(1)) \,|\, t \in \mathbb{R}_{>0}\} \subseteq (\mathbb{R}_{>0})^2$$

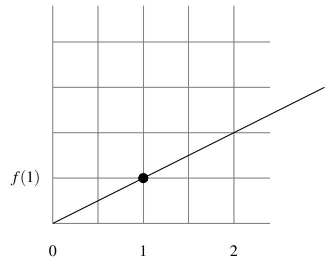

Abb. 11: Graph einer direkt proportionalen Funktion.

Bemerkung: Proportionalitäten sind proportionale Funktionen und finden sich im Lehrplan für die zweite Klasse der AHS. Funktionen sind aber erst Thema der vierten Klasse. Eine frühere Einführung des Begriffs Funktion (als eindeutige Zuordnung von einer ersten Menge in eine zweite) wäre sinnvoll.

5.2. Schlussrechnungen

Die folgenden Aufgaben sind Aufgaben der „Schlussrechnung“:

„Wenn bei einem Gemüsehändler 2 kg Erdäpfel 4 Euro kosten, wieviel kosten dann 1000 kg?“

oder

„Herr Meier hat für das vergangene Jahr 20 000 Euro Einkommensteuer gezahlt. Heuer hat sich sein Einkommen verdoppelt. Wieviel Steuer muss er dafür zahlen?“

Ohne weitere Informationen sind beide Aufgaben nicht lösbar. Man muss wissen, welche Eigenschaften die zwei Funktionen haben, die diese Situationen beschreiben.

Wenn die Preisgestaltung des Gemüsehändlers direkt proportional ist, dann kosten 1000 kg Erdäpfel 500-mal soviel wie 2 kg, also 2000 Euro. Tatsächlich wird man wegen eines Mengenrabattes aber viel weniger bezahlen.

Herr Meier wird für das doppelte Einkommen mehr als das Doppelte an Steuern bezahlen. Die Funktion, die jedem Einkommen die Einkommensteuer zuordnet, ist nicht direkt proportional (sondern stückweise linear und konvex).

Bei Schlussrechnungen muss immer zuerst überprüft werden, ob der beschriebene Zusammenhang direkt proportional ist! Für mehr Information dazu siehe (Pauer 2008).

5.3. Exkurs: Indirekte Proportionalität

Es gibt mehrere Varianten des Begriffes direkte Proportionalität, die indirekte Proportionalität ist die bekannteste davon.

Sind G und H Größenbereiche und $f : G \longrightarrow H$ eine Funktion (Zuordnung) von G nach H, dann ist f *indirekt proportional*, wenn für alle Elemente $g \in G$ und alle positiven reellen Zahlen c gilt:

$$f(c \cdot g) = \frac{1}{c} \cdot f(g)$$

In Worten: „Das Bild des c-fachen einer Größe ist das $\frac{1}{c}$-fache ihres Bildes.“.

Ein Gruppenhomomorphismus $\chi : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist eine Funktion mit den Eigenschaften:

$$\text{für alle } s, t \in \mathbb{R} \text{ ist } \chi(s.t) = \chi(s).\chi(t) \text{ und } \chi(1) = 1.$$

Damit definieren wir allgemeinere Proportionalitäten: f ist χ*-proportional*, wenn für alle Elemente $g \in G$ und alle positiven reellen Zahlen c gilt:

$$f(c \cdot g) = \chi(c) \cdot f(g).$$

Zum Beispiel ist die (Quadrat-)Funktion χ mit $\chi(s) = s^2$ ein Gruppenhomomorphismus, weil $(s.t)^2 = s^2.t^2$ und $1^2 = 1$ ist. Eine Funktion f ist *quadratisch proportional*, wenn für alle Elemente $g \in G$ und alle positiven reellen Zahlen c gilt:

$$f(c \cdot g) = c^2 \cdot f(g).$$

5.4. Was sind „lineare Funktionen"?

Kehren wir zurück zu Vektoren und Vektorräumen. Vektorräume sind auch Größenbereiche. Gewisse direkt proportionale Funktionen zwischen Vektorräumen heißen *lineare Funktionen*.

Sind V,W Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine Funktion, dann heißt f *linear*, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- das Bild jedes Vielfachen ist das Vielfache des Bildes, also

  $$f(c \cdot v) = c \cdot f(v) \ ,$$

  und
- das Bild jeder Summe ist die Summe der Bilder, also

  $$f(u + v) = f(u) + f(v) \ .$$

Jede lineare Funktion ist also direkt proportional, aber nicht umgekehrt.

Vorsicht: in Schulbüchern ist der Begriff „lineare Funktion" etwas allgemeiner als der in Büchern über Lineare Algebra (und hier) verwendete. Dieser entspricht dem Begriff „homogen-linear" in Schulbüchern.

5.5. Beispiele für lineare Funktionen

Im Schulunterricht der Sekundarstufe 2 spielen lineare Funktionen eine wichtige Rolle. Beispiele dafür sind:

- Eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist linear, wenn es eine reelle Zahl c gibt mit $f(t) = c \cdot t$. Ihr Graph ist die Gerade $\{t \cdot (1,c) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^2$ durch $(0,0)$.
- Eine Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ ist linear, wenn es reelle Zahlen c,d gibt mit $f(s,t) = c \cdot s + d \cdot t$. Ihr Graph ist eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch $(0,0,0)$.
- Eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ ist linear, wenn es ein Paar (c,d) reeller Zahlen gibt mit $f(t) = t \cdot (c,d)$. Ihr Graph ist eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ durch $(0,0,0)$.
- Mit V bezeichnen wir den Vektorraum aller differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, mit W den aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und mit f' bezeichnen wir wie üblich die Ableitung einer differenzierbaren Funktion f. Die Funktion „Differenzieren"

  $$D : V \longrightarrow W \quad \text{mit} \quad D(f) = f'$$

  ist nach der Summenregel und der Faktorregel der Differenzialrechnung linear, das heißt: die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen und die Ableitung eines Vielfachen ist das entsprechende Vielfache der Ableitung.

- Mit Z bezeichnen wir den Vektorraum aller Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und mit $E(X)$ den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X. Die Funktion

$$E : Z \longrightarrow \mathbb{R},\ X \longmapsto E(X)$$

ist linear, das heißt: der Erwartungswert der Summe von Zufallsvariablen ist die Summe ihrer Erwartungswerte und der Erwartungswert des Vielfachen einer Zufallsvariablen ist das entsprechende Vielfache des Erwartungswertes.

6. Gruppen und Vektorräume

Eine *Gruppe* ist eine Menge M zusammen mit einer *Rechenoperation* $\circ : M \times M \longrightarrow M$. Diese ordnet je zwei Elementen m,n in M wieder ein Element $m \circ n$ von M zu. Dabei müssen die folgenden *Rechenregeln* gelten:

Für alle Elemente m,n,p von M ist $(m \circ n) \circ p = m \circ (n \circ p)$ (Assoziativgesetz).

Es gibt ein Element e in M so, dass für alle Elemente m in M gilt: $e \circ m = m = m \circ e$ (Existenz eines neutralen Elementes).

Zu jedem Element m in M gibt es ein Element m^{-1} so, dass $m \circ m^{-1} = e = m^{-1} \circ m$ ist (Existenz von inversen Elementen).

Wenn für alle m,n von M zusätzlich gilt: $m \circ n = n \circ m$, dann heißt die Gruppe *kommutativ*.

Beispiele:

- Die Menge der reellen Zahlen mit der Addition ist eine kommutative Gruppe.
- Die Menge der positiven reellen Zahlen mit der Multiplikation ist eine kommutative Gruppe.
- Die Menge der Permutationen von $\{1,2,3\}$ mit der Hintereinanderausführung von Permutationen ist eine Gruppe, die nicht kommutativ ist.
- Die Menge aller Drehungen um den Nullpunkt in $\mathbb{R}^2$ mit der Hintereinanderausführung von Drehungen ist eine kommutative Gruppe.
- Die Menge aller Drehungen um eine Achse durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$ mit der Hintereinanderausführung von Drehungen ist eine Gruppe, die nicht kommutativ ist.

Eine *Operation einer Gruppe M auf einer Menge X* ist eine Funktion $M \times X \longrightarrow X,\ (m,x) \longmapsto m \cdot x$, welche die folgenden Eigenschaften hat:

$$\text{für alle } x \in X \text{ und alle } a,b \in M \text{ ist } a \cdot (b \cdot x) = (a \circ b) \cdot x \text{ und } 1 \cdot x = x.$$

Eine *Bahn in X* (durch $x \in X$) ist die Menge $\{m \cdot x \mid m \in M\}$.
X ist ein *homogener Raum*, wenn es in X nur eine Bahn gibt, das heißt, wenn X selbst eine Bahn ist.

Beispiele:

- Die Gruppe der positiven reellen Zahlen (mit der Multiplikation) operiert auf $\mathbb{R}^2$ durch $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (m,x) \longmapsto m \cdot x$ (siehe 3.1), die Bahnen dieser Operation sind $\{(0,0)\}$ und die Halbgeraden $\{c \cdot (a,b) \mid c > 0\}$ für $(0,0) \neq (a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2$ mit dieser Operation ist also ein Größenbereich, aber nicht homogen.
- Die Gruppe der Drehungen um den Nullpunkt in $\mathbb{R}^2$ operiert auf $\mathbb{R}^2$, ihre Bahnen sind Kreise mit Mittelpunkt $(0,0)$.
- Die Gruppe der positiven reellen Zahlen operiert durch Multiplikation auf der Menge aller reellen Zahlen. Es gibt drei Bahnen: $\{0\}$, die Menge der positiven reellen Zahlen und die Menge der negativen reellen Zahlen.

- Die Gruppe der positiven reellen Zahlen operiert durch Multiplikation auf der Menge aller positiven reellen Zahlen. Es gibt nur eine Bahn, somit ist die Menge der positiven reellen Zahlen ein homogener Größenbereich.

Ein reeller *Vektorraum* ist eine Menge V zusammen mit zwei *Rechenoperationen* $+ : V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$. Diese ordnen je zwei Elementen v, w in V wieder ein Element $v + w$ von V zu und je einem Element $v \in V$ und einer reellen Zahl c ein Element $c \cdot v$.

Dabei müssen die folgenden *Rechenregeln* gelten:

- Für die Addition allein: V mit $+$ ist eine kommutative Gruppe.
- Für die Multiplikation mit Zahlen: für alle $c, d \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ ist $1 \cdot v = v$ und $(c.d) \cdot v = c \cdot (d \cdot v)$.
- Für das Zusammenspiel der zwei Rechenoperationen: für alle $c, d \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ ist $c \cdot (v + w) = (c \cdot v) + (c \cdot w)$ und $(c + d) \cdot v = (c \cdot v) + (d \cdot v)$.

Literatur

BMBWF (2024a): *Volksschul-Lehrplan.* Version September 2024. https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_vs.html

BMBWF (2024b): *Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule.* Version September 2024. https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_ahs.html

Forster, O. (1984): *Analysis 2.* 5. Aufl., Braunschweig: Vieweg.

Jänich, K. (1993): *Lineare Algebra.* 5. Aufl., Berlin: Springer.

Griesel, H. (1997): Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe. *Journal für Mathematik-Didaktik* 18(4), 259 - 284.

Griesel, H. (2016): Die Vergleichstheorie des Messens und ihre Anwendung in der mathematikdidaktischen Grundlagenforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik* 37(1), 5 - 30.

Pauer, F. (2006): Was sind Vektoren? Wozu braucht man sie? *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 38, 87 - 98.

Pauer, F. (2008): Schlussrechnung, Modellbildung und Interpolation. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 40, 91 - 98.

Pauer, F. (2019): *Algebra und Geometrie im Schulunterricht.* 3. Aufl. Skriptum. Universität Innsbruck.

Anschrift des Verfassers

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik
Fakultät für LehrerInnenbildung
Universität Innsbruck
Innrain 52
6020 Innsbruck
Österreich

franz.pauer@uibk.ac.at